

Quiz 3:

Άσκηση 1:

α)

$$f(x, y) = (2x - 4y)^4 + e^{x^2 - 2y}$$

$$f_x = 8(2x - 4y)^3 + 2xe^{x^2 - 2y}$$

$$f_x = 16(2x - 4y)^3 - 2e^{x^2 - 2y}$$

$$f_{xx} = 48(2x - 4y)^2 + 2xe^{x^2 - 2y} + 4x^2e^{x^2 - 2y}$$

$$f_{xx} = 192(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2 - 2y}$$

$$f_{xy} = -96(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2 - 2y}$$

$$\text{Gradient}(x, y) = \begin{bmatrix} 8(2x - 4y)^3 + 2xe^{x^2 - 2y} \\ 16(2x - 4y)^3 - 2e^{x^2 - 2y} \end{bmatrix}$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 48(2x - 4y)^2 + 2xe^{x^2 - 2y} + 4x^2e^{x^2 - 2y} & -96(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2 - 2y} \\ -96(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2 - 2y} & 192(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2 - 2y} \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + (x-1)f_x(1, 1) + (y-1)f_y(1, 1) + \left(\frac{1}{2}\right)[(x-1)^2 f_{xx}(1, 1) + 2(x-1)(y-1)f_{xy}(1, 1) + (y-1)^2 f_{yy}(1, 1)] \\ &= 16 + 1/e + (x-1)(-64 + 2/e) + (y-1)(128 - 2/e) + \left(\frac{1}{2}\right)[(x-1)^2(192 + 6/e) + 2(x-1)(y-1) \\ &\quad (-384 - 4/e) + (y-1)^2(768 + 4/e)] \end{aligned}$$

Άσκηση 2:

$$\alpha) x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} * f(x_n)$$

$$f(x, y) = (x-2y)^2 + e^x$$

$$J(x_n)S_n = -f(x_n)$$

$$F(1, -1) = 9 + e$$

$$f_x = 2(x-2y) + e^x$$

$$f_y = -4(x-2y)$$

Όνοματεπώνυμο: Ζωγραφόπουλος Γιάννης

AEM: 934

Mail: zografop@inf.uth.gr

$$[2(x-2y) + e^x \quad -4(x-2y)] \begin{bmatrix} S1 \\ S2 \end{bmatrix} = -[9 \quad -e]$$

$$[6 + e \quad -12] \begin{bmatrix} S1 \\ S2 \end{bmatrix} = -[9 \quad -e]$$

$$\beta) f(x,y) = (x-2y)^2 + e^x$$

$$x^1 = x^0 - \alpha * \text{gradient}(f(x^0))$$

$$\text{gradient}(x, y) = \begin{bmatrix} 2(x-2y) + e^x \\ -4(x-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + e \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 + e \\ -12 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3:

α)

$$f_{x1} = 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4$$

$$f_{x2} = 18x_2 + 4x_1 + 6x_3 + 5$$

$$f_{x3} = 18x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 6$$

$$f_{x1x1} = 18$$

$$f_{x2x2} = 18$$

$$f_{x3x3} = 18$$

$$f_{x1x2} = 4$$

$$f_{x1x3} = 2$$

$$f_{x2x3} = 6$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 18 & 4 & 2 \\ 4 & 18 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

Δείχνω ότι είναι θετικά ορισμένος:

$$\begin{bmatrix} z1 & z2 & z3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 4 & 2 \\ 4 & 18 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix} =$$

Όνοματεπώνυμο: Ζωγραφόπουλος Γιάννης

AEM: 934

Mail: zografop@inf.uth.gr

$$= [18z_1 + 4z_2 + 2z_3 \quad 4z_1 + 18z_2 + 6z_3 \quad 2z_1 + 6z_2 + 18z_3] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 18z_1^2 + 4z_1z_2 + 2z_1z_3 + 4z_1z_2 + 18z_2^2 + 6z_2z_3 + 2z_1z_3 + 6z_2z_3 + 18z_3^2 = \dots$$

Τα κάνω άθροισμα τετραγώνων:

$$\dots = 10z_1^2 + 10z_2^2 + 8z_3^2 + (2z_1 + 2z_2)^2 + (2z_1 + z_3)^2 + (2z_2 + 3z_3)^2 > 0 \text{ θετικά ορισμένη άρα κυρτή}$$

β)

$$\text{gradient}(f(x)) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$\begin{bmatrix} 9x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + 13 =$$

$$9x_1^2 + 9x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_1x_2 + 9x_2^2 + 3x_2x_3 + 9x_3^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + 13 \\ = 9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13$$

Αντικαθιστώ για $x_0(1, 0, 0)$:

$$\text{gradient} = \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώ για $x_1(-21, -9, -8)$:

$$\text{gradient} = \begin{bmatrix} -428 \\ -259 \\ -228 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} -21 \\ -9 \\ -8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -428 \\ -259 \\ -228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 407 \\ 250 \\ 220 \end{bmatrix}$$

Όνοματεπώνυμο: Ζωγραφόπουλος Γιάννης

AEM: 934

Mail: zograpop@inf.uth.gr

Άσκηση 5:

α)

$$f_x = 6x - 12y - 2$$

$$f_{xx} = 6$$

$$f_y = -12x + 38y - 4$$

$$f_{yy} = 38$$

$$f_{xy} = -12$$

$$f_x = 0 \Rightarrow 6x - 12y - 2 = 0 \Rightarrow x = 2y - 3$$

$$f_y = 0 \Rightarrow -12x + 38y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4/7$$

$$6x - 12\left(\frac{4}{7}\right) - 2 = 0 \Rightarrow x = 31/21$$

$$D = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2 = 228 - 144 = 84 > 0$$

$$f_{xx} > 0$$



Άρα τοπικό ελάχιστο στο σημείο

$(31/21, 4/7)$

β)

$$g_s = 3s^2 + 12t$$

$$g_{ss} = 6s$$

$$g_t = 6t + 12s$$

$$g_{tt} = 6$$

$$g_{st} = 12$$

$$\text{Gradient}(g) = 0 \Rightarrow 6t + 12s = 0 \Rightarrow t = -2s$$

$$3s^2 + 12t = 0 \Rightarrow (3s - 24)s = 0 \Rightarrow s = 0, t = 0 \text{ ή } s = 8, t = -16$$

Όνοματεπώνυμο: Ζωγραφόπουλος Γιάννης

AEM: 934

Mail: zografop@inf.uth.gr

Για $s = 0, t = 0$:

$$D = g_{ss}(0,0)g_{tt}(0,0) - g_{st}^2(0,0) = 0 - 144 < 0 \text{ σαγματικό οπότε δεν γνωρίζουμε}$$

Για $s = 8, t = -16$:

$$D = g_{ss}(8, -16)g_{tt}(8, -16) - g_{st}^2(8, -16) = 48 * 6 - 12^2 = 288 - 144 = 144 > 0$$

$$g_{ss} = 48 > 0$$



Άρα τοπικό ελάχιστο στο σημείο (8, -16)